B. LES DIVISIONS

Les méthodes, les dispositions, et les sens des divisions euclidiennes sont encore plus variés d'un pays à l'autre et d'une époque à une autre, que celles des multiplications.

1. UNE DIVISION « CLASSIQUE » EN FRANCE [1]

1.1. Un procédé répandu

La disposition ci-dessous, utilisée au Chili, est assez similaire à celle en usage dans d'autres pays en particulier en France et je crois en Italie, depuis son introduction en Europe par Fibonacci.
Il s'agit de diviser 836 par 2. Les élèves écrivent :

```
  8'3'6' : 2 = 418
- 8
  0 3
   - 2
    16
   -16
     0//
```

Le projet est écrit en tête, et le quotient en ligne. La division est exacte et par conséquent aussi l'égalité 836 : 2 = 418 (S'il y avait une reste le signe égal ne se justifierait pas).
Mais ce qu'ils disent et font est beaucoup plus complexe car ils appliquent à un cas simple une méthode adaptée à tous les cas. Les étapes du calcul sont : a) la structuration de l'opération : la pose de l'apostrophe de gauche. b) l'algorithme : une répétition de boucles formées chacune d'une estimation d'un chiffre du quotient suivie d'une multiplication et de la soustraction du produit obtenu du reste des opérations précédentes - qui peut révéler que la tentative est avortée.

Ici le résultat des produits est écrit, puis soustrait du reste. Mais on a longtemps exigé des élèves que la soustraction soit imbriquée avec la multiplication réduite : l'élève n'écrit plus ni le résultat des multiplications, ni les soustractions
Dans une opération plus complexe, les élèves pourraient être conduits à faire des tentatives infructueuses pour déterminer un chiffre du quotient.
a) Disposition
Par exemple pour diviser 14 456 665 par 481, l'élève pose

```
14 456 665        | 481
                  |________
                  |
```

en laissant suffisamment d'espace pour les décalages.

b) Estimation du premier chiffre du quotient
Ensuite il cherchera à prendre dans le dividende, le plus petit nombre de chiffres qui constituent un nombre plus grand que le diviseur : ici quatre : 1445
Il se demandera combien de fois il peut enlever le diviseur 481 de ce nombre et effectuera une approximation par troncature : dans 14 combien de fois 4 ? 3 fois. Mais il aura un doute

[1] Toutes les méthodes en usage en Europe occidentale sont issues, avec quelques variantes mineures d'un pays et d'une époque à l'autre, de celle proposée par Fibonacci (Léonard de Pise) au 12ième siècle.

parce que 481 est près de 500, Dans 14, combien de fois 5 ? 2 fois seulement. Certains élèves écriront au quotient 3 mais d'autres écriront 2 légitimement.
c) Calcul du premier produit à soustraire
L'élève effectue alors la multiplication en ligne
3 x 481 = 1443 qui correspond implicitement à 3 x 10 000 x 481 = 14430 000
Ce nombre doit être soustrait du dividende 14 456 665 ce qui conduit à placer les quatre chiffres significatifs 1443 sous les quatre chiffres significatifs 1445
2 x 481 = 962 pour les autres qui font de même
Ces dernier effectuent la soustraction 1445 – 962 = 483 et constatent tristement qu'ils auraient pu enlever 481 une fois de plus ! Ils doivent rayer leur quotient, et deux termes de leur soustraction pour reprendre au début et rejoindre leurs camarades.

Le calcul se présente alors ainsi sous la **forme développée** :

Et ainsi sous la **forme réduite traditionnelle :**

14 456 665	481	14 456 665	481
-14 43	3	0002	3
00 02			

Habituellement l'élève doit ne descendre qu'un chiffre de plus et recommencer le processus, mais parfois le chiffre quotient est 0. Alors il faut « descendre » deux chiffres...C'est le cas ici. Lorsque après plusieurs tentatives infructueuses, les colonnes s'allongent, les alignements se perdent. Or ici il faut réitérer cette opération et écrire plusieurs zéros successivement :

14 456 665	481	14 456 665	481
- 14 43	3 0 0	00026 66	3 0 0
00 026 66			

L'élève cherche alors
En 2 666 combien de fois 481 ? En 266 combien de fois 48, en 26 combien de fois 4 ?
6 fois, essaiera-t-il
En 266 combien de fois 50 ? Diront d'autres qui essaieront alors 5 fois…

14 456 665	481	14 456 665	481
14 43	3 0 0 5	00 026 66	3 0 0 5
- 00 02		02 61	
00 026 66			
- 240 5			
026 1			

Et pour trouver le dernier chiffre ils devront à nouveau effectuer 481 x 5
Finalement l'opération se présentera ainsi :

14 456 665	481	14 456 665	481
14 43	3 0 0 5 5	00 026 66	3 0 0 5 5
- 00 02		026 15	
00 026 66		0 210	
- 240 5			
026 15			
- 2 405			
0 210			

1.2. Les propriétés ergonomiques de cette méthode

a) L'étude ergonomique empirique de cette forme de division montre d'abord l'exacerbation des facteurs déjà relevés pour la multiplication. La division conjugue les difficultés de la multiplication en ligne et des reports internes de retenues, avec celles de la soustraction et de ses retenues. La connaissance des produits y est utilisée sous des contraintes beaucoup plus sévères qui exigent un entraînement beaucoup plus intense. Nous ne reprendrons pas cette étude ici. En effet l'ordinogramme de la division démontre une complexité structurelle propre qui a des conséquences spécifiques.

b) Le *principal nouveau facteur de complexité didactique* et de difficultés, provient des tentatives pour déterminer un chiffre du quotient. L'élève doit écrire ses calculs avant de savoir s'ils conviennent ou non. Or ces « tentatives » ne sont pas des « erreurs », elles sont des étapes normales, inévitables dans une approximation progressive d'un résultat. On ne sait que le quotient est exact que par la vérification du fait que le produit du chiffre tenté au quotient, par le diviseur, est inférieur au reste, mais ne lui est pas inférieur d'une quantité égale ou supérieure au diviseur. Les tentatives sont des essais légitimes. A la plume, la tentative malheureuse doit être biffée, ce qui gâche irrémédiablement l'ordonnance du calcul, elle décale les chiffres et elle est interprétée finalement comme une maladresse et même comme une faute. Pour éviter ce résultat l'élève doit prévoir le bon chiffre par un calcul mental encore plus complexe …

Ainsi une simple disposition de chiffres a des conséquences didactiques et psychologiques assez dommageables, et le nombre des opérations à faire devient aléatoire et assez élevé.

c) Le deuxième facteur d'erreurs est la perte de l'alignement des colonnes dès que l'opération s'allonge
d) Le caractère le plus incertain du quotient est de ce fait le nombre de chiffres. Les élèves qui pensent à – et qui savent - contrôler l'ordre de grandeur du résultat peuvent corriger leurs erreurs. Les autres ont souvent de mauvais résultats.
e) L'élève doit souvent effectuer plusieurs fois et inutilement les mêmes calculs lorsque plusieurs chiffres du quotient sont identiques.
f) La complexité et la difficulté de l'algorithme font que les élèves doivent apprendre « formellement » et parfaitement l'exécution des sous programmes avant d'effectuer les opérations complètes. L'exécution du calcul est durcie par le fait qu'il n'est pas facile d'ajuster ou de corriger un sous-programme. De ce fait l'apprentissage doit être plus exigeant : il est très important de réussir complètement chaque étape avant de passer à la suivante. En s'accumulant, les imprécisions ou les incertitudes, produisent des taux d'échecs irrémédiables.

1.3. L'organisation de l'apprentissage

L'étude de la division ne peut commencer qu'après celle de la multiplication en ligne. Ainsi l'ordre d'apprentissage est celui de l'inclusion des sous-programmes :

- La division d'un nombre de deux chiffres par un nombre d'un chiffre, sans reste puis avec reste : étude des tables, disposition, vocabulaire (dividende, diviseur, quotient, reste)

- La division et la numération décimale : division par 10, 100 1000, d'un naturel, d'un décimal
- La division où le diviseur n'a qu'un chiffre : initiation à une succession de divisions partielles simples
- Le diviseur comprend plusieurs chiffres mais le quotient n'en a qu'un : initiation à la recherche d'un chiffre du quotient par troncature et approximation.
- diviseur et quotient ont plusieurs chiffres, initiation à la recherche des termes de la première division partielle, réitérations du cas précédent

Quelques propriétés de la division peuvent être étudiées et justifiées par référence à la multiplication et par l'induction à partir d'un calcul.

Le reste est une question d'entraînement et d'usage.

1.4. Les « sens » des divisions

La recherche du quotient s'inscrit dans divers types de problèmes qui donnent à « la division » des sens et un vocabulaire différents (voir Représentation et didactique du sens de la division in didactique et acquisition des connaissances scientifiques la pensée sauvage 1987) dans « Rationnels et décimaux » pp. 276 – 314. il en est recensé 22, mais les plus importants sont :

1. Pour partager : ce terme recouvre des pratiques très diverses : partages égalisés (on fait un nombre déterminé de parts qu'on égalise ensuite), attributions répétées de parts arbitraires mais égales jusqu'à épuisement (on cherche la valeur d'une part), distributions régulières (on cherche le nombre de parts), répartitions égales de quantités variables etc. Nous tenons ces différentes pratiques pour des modalités évidement équivalentes
2. Pour trouver le terme inconnu d'un produit
3. Pour trouver l'image de 1 dans une application linéaire, (le prix de l'unité par ex.), ou le coefficient linéaire,
4. Pour trouver l'antécédent d'une valeur dans une application linéaire
5. Pour trouver le reste d'une division ou d'une soustraction répétée (La course à vingt, 1998)
6. Pour trouver un « rapport », un taux, …
7. Pour représenter ou approcher une fraction par un décimal

Les sens et les pratiques sont différents aussi suivant d'autres caractères :

La structure mathématique dans laquelle sont pris les nombres : division euclidienne dans les naturels, division dans les rationnels, division dans les réels etc. contribue à donner des sens et des résultats différents

La taille des nombres : la division de 0,3 par 0,8 n'est pas comprise comme celle de 3 par 8 ni comme celle de 30 par 8.

D'une façon générale, tous ces sens sont différents et c'est l'opération et le vocabulaire qui les unifie.

Cela crée d'importantes difficultés didactiques, les enseignants étant portés à confondre ce qui leur est familier avec ce qui devrait être évident pour les élèves. Ils s'attendent à ce que les élèves comprennent, apprennent et réutilisent « la division » qu'on leur enseigne dans des rôles et avec des sens qui sont en fait très différents.

1. LA DIVISION ERGONOMIQUE

La méthode que nous venons de décrire est utilisée en France sans modifications sensibles depuis le moyen âge et au moins depuis le XVIe siècle. Nous avons cherché une méthode mieux adaptée aux possibilités humaines, comme nous l'avons fait pour la multiplication, sans nous référer à aucune méthode existante. Nous avons constaté, après coup, que les méthodes utilisées dans de nombreux pays comme les pays anglo-saxons ou la Finlande sont très proches de cette méthode ergonomique. Il aurait suffi de comparer nos traditions avec celles de nos voisins car les avantages sont évidents.
Il ne s'agit pas seulement
- de diminuer les difficultés d'exécution,
- et la fiabilité du calcul,
- mais aussi de soulager l'apprentissage en diminuant les répertoires
- et en assouplissant les conditions d'acquisition.

2.1 Le procédé de calcul

Il diffère très peu, dans son principe de la méthode de Fibonacci mais il ménage des contrôles et des possibilités importantes pour l'apprentissage.
Reprenons la même opération

14 456 665 481

L'espace de travail de l'élève est partagé en trois zones :
A gauche, la zone des essais de multiplications avec en tête le ***diviseur*** (zone blanche).
A droite, un tableau ouvert comprenant un nombre de colonnes égal au nombre de chiffres du dividende. Cette zone est elle-même séparée en deux par un trait horizontal :
La zone du quotient ou de l'addition des quotients partiels qui se trouve au dessus du trait (zone gris foncé)
La zone des soustractions et du calcul des restes, au dessous de ce trait avec en tête le ***dividende*** qui fixe le nombre de colonnes (zone gris clair) :
Dans le cas de calcul dans les décimaux, il faut ménager une place à droite de la zone des soustractions
Dans notre exemple nous avons donc la disposition ci-dessous :

481								
	1	4	4	5	6	6	6	5

Première phase de l’exécution ordinaire:
Comme dans la méthode précédente, recherche du nombre de chiffres minimum dans le dividende pour pouvoir soustraire au moins une fois le diviseur 481. Il faut prendre les quatre premiers chiffres, on obtient 1445

Deuxième phase : Estimation du premier chiffre du quotient: en 14 combien de fois 4 « il y va trois fois », ou en 14 combien de fois 5 peut être 2 seulement essayons 3

Troisième phase : Multiplication d’essai
Les multiplications d’essais se font dans la partie blanche : 481 x 3 = 1443
L’élève qui pense que l’on ne peut soustraire le diviseur que deux fois trouve : 481 x 2 = 962
Alors, soit il peut estimer que le reste sera trop grand, et il écrit au dessous de sa multiplication par deux, la multiplication par 3, soit il se lance inconsidérément dans la soustraction, nous verrons plus loin que rien n’est perdu sinon un peu de temps, contrairement à la méthode précédente.

Quatrième phase : Soustraction du plus grand produit

				3				
481 x 3 = 1443 (inutile de répéter 481)	**1** -1	**4** 4	**4** 4	**5** 3	**6**	**6**	**6**	**5**
	0	0	0	2				

Le reste partiel est 2

Cinquième phase
Le quotient 3 convient, l’élève peut l’écrire définitivement dans la partie du quotient (gris foncé) ***dans la colonne des unités de sa soustraction***

L’élève peut déjà donner
- le nombre de chiffres du résultat : c’est le nombre des colonnes qui ne sont pas à gauche du premier chiffre obtenu: 3
- et par conséquent une estimation du quotient : entre trente mille et 39 999

Sixième phase : Ecriture du reste utile

				3				
481 x 3 = 1443	**1** -1	**4** 4	**4** 4	**5** 3	**6**	**6**	**6**	**5**
	0	0	0	2	6	6	6	

L'élève « descend » un nombre de chiffres suffisant pour former un nombre plus grand que le diviseur. Ce reste est ici 2666

Septième phase :Réitération de la phase 2 : estimation du quotient partiel : dans 2666 combien de fois 481 ? ou dans 26 combien de fois 4 ? Essayons 6 fois

Huitième phase : Multiplication d'essai à gauche 481 x 6 = 2886 ça ne va pas (un élève entraîné doublera de tête le résultat obtenu la première fois : 1443 x 2)
Deuxième multiplication d'essai : 481 x 5 = 2405 l'élève est sûr de pouvoir effectuer la soustraction

Neuvième phase : Nouvelle soustraction dans le tableau : 2666 - 2405 = 261

				3				
481 x 3 = 1443 x 5 = 2405	**1** -1	**4** 4	**4** 4	**5** 3	**6**	**6**	**6**	**5**
	0	0	0	2 - 2	6 4	6 0	6 5	
					2	6	1	

Dixième phase : Ecriture du quotient partiel 5 dans la colonne des unités de la soustraction partielle,

				3			**5**	
481 x 3 = 1443 x 5 = 2405	**1** -1	**4** 4	**4** 4	**5** 3	**6**	**6**	**6**	**5**
	0	0	0	2 - 2	6 4	6 0	6 5	
					2	6	1	

et occupation des colonnes vides où le quotient partiel est 0…

Onzième phase : Réitération des phases 2 à 6 ou 7 à 9

				3	**0**	**0**	**5**	
481 x 3 = 1443 x 5 = 2405	**1** -1	**4** 4	**4** 4	**5** 3	**6**	**6**	**6**	**5**
	0	0	0	2 - 2	6 4	6 0	6 5	
					2	6	1	5

Manifestement, la multiplication d’essai précédente (x5) convient: son résultat peut être utilisé

				3	**0**	**0**	**5**	**5**
481 x 3 = 1443 x 5 = 2405	**1** -1	**4** 4	**4** 4	**5** 3	**6**	**6**	**6**	**5**
	0	0	0	2 - 2	6 4	6 0	6 5	
					2 - 2	6 4	1 0	5 5
					0	2	1	0

2.2. Les sécurités pour l’exécution maladroite

Revenons à notre débutant qui pose la soustraction d’un nombre « trop petit ».
Et qui écrit dans zone des quotients le quotient partiel : 2, dans la colonne ou il a placé les unités de sa soustraction.
Le nombre de chiffres du quotient est fixé et connu : 5 chiffres

481 481 x 2 = 962				**2**				
	1 -	4 9	4 6	5 2	6	6	6	5
		4	8	3				

En appliquant la méthode l’élève voit alors qu’il peut retrancher 481 de 483 : il le fait,
483 – 481 = 002

Et comme il a enlevé 481 une fois, il doit monter son « 1 » dans la colonne des unités de sa soustraction, c'est - à dire la 4ième, où il a déjà placé un 2. Il place son 1 au-dessus et voit qu'il aurait pu soustraire 3 x 481, d'un coup

Ensuite il continue comme précédemment

<table>
<tr><td rowspan="4">481
481 x 2 = 962</td><td></td><td></td><td></td><td>1
2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1
-</td><td>4
9</td><td>4
6</td><td>5
2</td><td>6</td><td>6</td><td>6</td><td>5</td></tr>
<tr><td>
-</td><td>4
4</td><td>8
8</td><td>3
1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

A chaque ligne il peut abaisser tous les chiffres qui restent (ou ne le faire que lorsque c'est indispensable)

<table>
<tr><td rowspan="4">481
481 x 2 = 962</td><td></td><td></td><td></td><td>1
2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1
-</td><td>4
9</td><td>4
6</td><td>5
2</td><td>6
0</td><td>6
0</td><td>6
0</td><td>5
0</td></tr>
<tr><td>
-</td><td>4
4</td><td>8
8</td><td>3
1</td><td>6
0</td><td>6
0</td><td>6
0</td><td>5
0</td></tr>
<tr><td></td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>6</td><td>6</td><td>6</td><td>5</td></tr>
</table>

Pour pouvoir soustraire 481, il doit alors prendre les chiffres jusqu'à la 7ième colonne : 2666.
Dans la partie gauche il cherche le nombre maximum en faisant plusieurs calculs, plus économiques qu'un découpage en quotients partiels trop petits :
Il essaie 4 fois 5 fois et 6 fois

<table>
<tr><td rowspan="4">481
481 x 2 = 962
481 x 4 = 1924
x 5 = 2405
x 6 = 2886</td><td></td><td></td><td></td><td>1
2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1
-</td><td>4
9</td><td>4
6</td><td>5
2</td><td>6</td><td>6</td><td>6</td><td>5</td></tr>
<tr><td>
-</td><td>4
4</td><td>8
8</td><td>3
1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>6</td><td>6</td><td>6</td><td>5</td></tr>
</table>

Il voit que 2405 convient, il effectue la soustraction et il monte le quotient partiel « 5 » dans la colonne des unités de sa nouvelle soustraction (la 7ième)
Les colonnes laissées vides devront recevoir des zéros
Et pour terminer son opération, il peut réutiliser immédiatement son résultat

481 481 x 2 = 962 481 x 4 = 1924 x 5 = 2405 x 6 = 2886				**1** **2**			**5**	
	1 -	4 9	4 6	5 2	6	6	6	5
	- 	4 4	8 8	3 1				
		0	0 -	2 2	6 4	6 0	6 5	5
				0 -	2 2	6 4	1 0	5 5
						2	1	0

Finalement il effectue la somme des quotients partiels qu'il a eu la maladresse de ne pas trouver du premier coup.

481 481 x 2 = 962 481 x 4 = 1924 x 5 = 2405 x 6 = 2886				**3**	**0**	**0**	**5**	**5**
				1 **2**			**5**	**5**
	1 -	4 9	4 6	5 2	6	6	6	5
	- 	4 4	8 8	3 1				
		0	0 -	2 2	6 4	6 0	6 5	5
				0 -	2 2	6 4	1 0	5 5
						2	1	0

2.3.La division dans les décimaux

Nous avons étudié dans « rationnels et décimaux » comment faire comprendre et « inventer » aux élèves les calculs des fractions et des décimaux. La disposition auxquelles ils parvenaient en mettant en ordre leurs calculs auxiliaires progressifs était celle que nous avons indiquée ci-dessus. Pour chercher le nombre de dixièmes puis de centièmes contenus dans le reste, les élèves écrivent le nombre de dixièmes du reste en lui concaténant un zéro, et continuent l'opération comme pour les entiers. Ils écrivent les parties décimales du quotient, à gauche du quotient lui-même, après une virgule.

2.4.. Comparaison avec la disposition utilisée en Finlande

468 : 18

			2	6
1	8	4	6	8
	-	3	6	
		1	0	8
	-	1	0	8
				0

A part le dividende qui se trouve malencontreusement, les dispositions sont identiques

2.5.L'apprentissage par optimisation

Comme pour la multiplication, cette méthode de division peut traduire directement les tout premiers pas des élèves, qui cherchent par exemple combien on peut distribuer de paquets de 18 gâteaux ils peuvent faire avec 6742 gâteaux sortis chauds du four. Les soustractions fastidieuses de 18 gâteaux sont bien vite remplacées par des soustractions de 36, puis de 180 et même de 1800 gâteaux.
La méthode finale n'est que la traduction de ces raisonnements.
Evidemment, il faut que le professeur marque bien les progrès et rejette les tâtonnements initiaux (ne calculez plus comme des bébés !) pour exiger la méthode optimale, mais pour la compréhension, ou quand on est un peu fatigué dans une opération longue, ou pour des vérifications quand il y a une erreur, il est bien commode de pouvoir, posément, vérifier ce qu'on a fait en explicitant les calculs intermédiaires.
La forme d'apprentissage que permet cette méthode suppose que le professeur exerce une pression constante sur les élèves pour qu'ils améliorent « leur style » mais elle laisse place à l'essentiel, même avec les élèves lents ou faibles. Tous font ce qui est nécessaire à tous, chacun avec ses talents (comme en sport collectif scolaire).
Cette méthode peut être enseignée aux élèves qui ont appris la méthode standard, comme un moyen de contrôle en cas d'opération compliquée, comme moyen de comprendre ce qu'ils font dans la méthode standard, ou comme moyen de se rattraper d'un échec avec cette méthode.

2..4 L'analyse ergonomique et la comparaison

1. Il est clair que la disposition demande un peu de temps, mais même si le tracé des colonnes n'est pas élégant cela a beaucoup moins d'importance que les erreurs que

l’on évite ainsi. Globalement, le temps des recomptages et des vérifications dans la méthode classique est tel que nous n’avons pas observé d’allongement significatif du temps de calcul.

2. Certes, les résultats des produits sont écrits deux fois ce qui peut paraître ralentir le travail et parfois être une source d’erreurs de recopie.
3. Mais les avantages sont très importants et très clairs : toutes les tentatives sont acceptées et ne perturbent pas le travail, très vite les élèves utilisent les calculs d’essai pour éviter d’avoir à effectuer une addition des quotients partiels
4. Tous les calculs sont écrits. On retrouve la même facilité de contrôle et de correction qu’avec la multiplication
5. La méthode permet de conserver le sens des opérations successives effectuées. Il est même possible d’établir un lien de cette opération avec le calcul de la multiplication en tableau.
6. Nous avons montré que cette disposition permettait aux élèves l’extension de la méthode au calcul dans les rationnels, même dans des situations qui conféraient à ces opérations un sens très différent du sens initial : encadrement d’un décimal (réf 1987, Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire) ou recherche du reste (réf 1998: La théorie des situations didactiques”. la course à vingt pp 25-43)
7. Mais les propriétés que nous avons trouvé les plus intéressantes sont les propriétés relatives à l’apprentissage. La souplesse de la méthode permet aux élèves lents de poursuivre et de parachever leur apprentissage (par exemple des tables) dans les exercices et problèmes, sans être immédiatement disqualifiés par leurs difficultés.

CONCLUSIONS

Nous nous sommes fondés sur les observations suivantes :

1. L’enseignement des opérations numériques élémentaires et des occasions de s’y exercer, absorbait, vers les années 30, une très grande partie du temps de la scolarité primaire. (près de 400 heures sur en 5 ans)
2. Ce fait s’explique par la complexité des algorithmes et leurs imperfections, par le niveau de rapidité et de fiabilité qui était requis et par les conceptions didactiques classiques de l’époque qui dans ces conditions conduisaient les enseignants à choisir des méthodes d’apprentissage extrêmement coûteuses
3. Malgré cet effort considérable, les méthodes de calcul enseignées aux élèves en France n’étaient apprises que par une partie de la population, bien qu’à cette époque, ces calculs étaient très couramment employés dans toutes sortes d’activités sociales visibles par les élèves.

Les expériences auxquelles nous nous sommes livrés ont montré

1. Qu’il est possible d’améliorer les résultats de cet enseignement du calcul en enseignant les méthodes « ergonomiques de multiplication et de division aux élèves qui pratiquent déjà les méthodes classiques (en CM2). On observe en deux ou trois mois une nette augmentation du pourcentage de réussite globale surtout sur les opérations longues, sans que diminue sensiblement la vitesse d’exécution. L’amélioration est plus importante pour les élèves « faibles » et « moyens ».
2. Qu’il est possible d’enseigner ces modes de calcul des multiplications et des divisions, directement à des élèves de l’école primaire, sans enseigner d’abord la méthode

classique. Au contraire il leur est facile de passer de ce mode de calcul à l'ancien sur les opérations courtes.

3. qu'il est possible d'enseigner le calcul par des méthodes de découverte et d'optimisation moins contraignantes et plus intéressantes pour les élèves et plus rapides. Certes il faut que les calculs des sommes et des différences soient bien assurés mais les niveaux prérequis de connaissance des tables et de l'exécution des algorithmes sont moindres, l'apprentissage peut se poursuivre rapidement par adaptation signifiante plus attrayante que le « drill ». .
4. Les résultats des élèves, contrôlés régulièrement, n'ont pas été moindres qu'avec les anciennes méthodes et beaucoup de temps était gagné, au moins une centaine d'heures. Ce temps épargné a permis d'entreprendre l'étude de notions mathématiques plus savantes et une initiation à l'activité mathématique très intéressante pour les élèves.
5. La conduite pédagogique des situations didactiques nécessaire est plus délicate et plus fatigante pour les professeurs, mais elle leur a paru aussi plus attrayante, pour eux et pour les élèves.
6. Pourtant il y a des risques liés aux pratiques des enseignants très lourdement chargées de behaviorisme, et à l'insuffisance de leur culture didactique écrasée par des considérations pédagogiques générales et drastiques, par des injonctions psychologiques infondées et par une idéologie scolaire individualiste très néfaste à la transmission et à l'évolution normale d'une culture.
   a. Le risque de voir les apprentissages durer autant de temps qu'avec les méthodes classiques n'est pas négligeable. En particulier si les professeurs veulent à la fois faire parcourir les étapes intermédiaires de la découverte, mais en les enseignant chacune comme les étapes de l'apprentissage classique c'est-à-dire comme un savoir définitif nécessaire pour la suite (par des méthodes de répétition par exemple)
   b. Le risque de voir les élèves s'enliser dans la reproduction sans fin des lourdes premières méthodes de découverte et de ne pas atteindre la vitesse espérée si le professeur ne peut pas exercer une pression suffisante pour provoquer les adaptations et obtenir l'émulation nécessaire

Même très justifiée, la modification d'une méthode classique, surtout si elle est très ancienne, est un projet presque impossible à réaliser.

- L'exemple de la régularisation du calcul oral en France le prouve : Pendant presque deux cents ans il a été souhaité sans succès de remplacer « soixante dix, quatre vingt et quatre vingt dix » par des dénominations plus régulières et moins ridicules comme « septante, huitante (ou octante) et neufante (ou nonante) ». Cette réforme a été longtemps recommandée dans les commentaires officiels, *elle n'a jamais été appliquée* dans la plupart des régions. Elle ferait pourtant gagner deux mois aux élèves du cours préparatoire et éviterait que ne commence la dérive de quelques uns d'entre eux. Elle ne demande pas de moyens nouveaux, aucun matériel, aucun recyclage des professeurs, elle a été théoriquement et expérimentalement justifiée de façon irréfutable. Et surtout elle a été réussie par plusieurs pays ou régions francophones.
- Alors pourquoi ? Pourquoi des propositions réalisables, fondées sur des résultats scientifiques établis et surtout prenant en compte tout le fonctionnement microdidactique du système trouvent-elles des opposants farouches, lesquels n'hésitent pas à adhérer à de grands projets idéologiques flous et incertains, qui ne sont basés, par des inférences douteuses, que sur des opinions ou sur l'importation en didactique de connaissances partielles. ?

- Pourquoi croire que les professeurs pourront restaurer des méthodes de calcul maladroites, d'exécution inutilement compliquées, dont l'apprentissage est pénible pour une grande partie de la population, dont l'exercice rapide est aujourd'hui totalement inutile, et que les élèves ne voient presque jamais personne utiliser.
- Pourquoi professer la bêtise dès qu'il s'agit d'enseignement élémentaire ?

Il me semble que c'est parce que nos connaissances de la façon dont les sociétés transmettent leurs cultures, malgré et à cause de plusieurs millions d'années de pratique, reste mystérieuse et comme tabou. La seule rationalisation naïve ne suffit pas Les études d'ethnomathématique et de macro didactique débutent. Les bases scientifiques de la didactique sont encore trop peu connues. L'application directe et naïve de ses résultats est probablement prématurée. Mais il est urgent que la didactique se développe d'abord comme science, par l'étude scientifique de ses fondements, par la confrontation et par des vérifications plus rigoureuses de ses résultats, qu'elle ne soit pas immédiatement condamnée à prouver sa valeur de vérité dans de soi-disant « applications » qui sont en fait des défis pour l'instant hors de sa compétence, que les institutions intermédiaires indispensables à son exercice soient mieux assurées, plus actives et sachent mieux contrôler leur impatience.

Alors, l'avenir dira si l'amélioration progressive de l'enseignement, fondée sur des recherches scientifiques et sur des preuves expérimentales et respectueuses des lois (des équilibres) du système scolaire, peut remplacer utilement les réformes brutales, idéologiques et aveugles que nous connaissons aujourd'hui.

ANNEXES

1. REFERENCES « INTERNES » :

Articles de Guy Brousseau et coll. sur les nombres et leurs opérations : naturels, entiers, rationnels, décimaux.

5 catégories de documents

- ***Publication dans une revue ou dans un ouvrage***,
- **Publication dans des actes de colloques internationaux,**
- *Publication « grise », par ex. dans les cahiers de l'IREM ou du CRDP, ou dans des dossiers pour la formation, dans des fiches TV, etc.*
- Articles non publiés mais achevés et communiqués (lettres par ex.),
- Fragments significatifs, éléments pour des articles en cours, etc. .

Antérieurs à 1970

L'algèbre sagittale (1960)

Les mathématiques au cours préparatoire DUNOD 1965

Réductions d'écritures et substitution formelle (CE1) (Cahiers du CREM)

L'associativité « associativité de la multiplication des entiers naturels » (Cahiers du CREM)

Etude des constructions de l'ensemble Z des entiers relatifs (accompagné d'un cours non verbal d'enseignement programmé.(1970) (Cahiers du CREM)

1970

Translations dans l'ensemble N des entiers naturels (cahiers de l'IREM n°5)

Additions dans les entiers (positifs et négatifs) (cahiers de l'IREM n°5)

Le jeu de l'oie (cahiers de l'IREM n°5)
Organigrammes (cahiers de l'IREM n°5)
1971
Processus de mathématisation : un exemple de processus de mathématisation, l'addition dans les naturels, CP CE1 (Colloque APM 1971)
1972
a) Division Euclidienne au CE et CM (processus de mathématisation, 5e chapitre) Jeu de Taquin
b) *La multiplication : définition dans N opérations au CM1 (cahiers de l'IREM)*
c) **Peut-on améliorer le calcul des produits de naturels, Compte rendu du 1er colloque des sciences de l'éducation**
1973
La course à 20
Recherches sur l'enseignement du calcul numérique (Séminaire INRDP à Orléans Janvier 73)
Transcription N. Audigier (dans les cahiers de l'IREM 1974)
Répertoire multiplicatif (émission de Télévision, Equipe de l' ENS de Saint Cloud
Le jeu des envahisseurs (Cahiers de l'IREM janvier)
Constructions de formules au CP dans <N, +>, (Cahiers de l'IREM)
1974
Les structures ordonnées dans l'enseignement élémentaire (Compte rendu de l'exposé de G. Brousseau relatif à la relation d'ordre Cahiers de l'IREM)
1976
Quelques réflexions sur une approche des décimaux (Emission de Télévision et fiche)
Problèmes d'enseignement des décimaux du cours moyen à la 4e (fiche de travail)
Les décimaux, constructions mathématiques (Cahiers de l'IREM)
1978
Quelques notes pour une épistémologie des décimaux : 1. position du problème 2. les travaux de Stévin 3. l'Egypte du moyen empire
1979
Réflexions méthodologiques sur une étude longitudinale de l'apprentissage de la numération (2p)
1983
Etude de Didacticiels pour l'enseignement du nombre et de la numération
1984
L'enseignement de l'énumération (résumé 2p.) Communication ICME Adélaïde
1986
L'enseignement de l'énumération : Etude de deux problèmes pratiques et fondamentaux dans le cadre de la théorie des situations et du contrat didactique
1987
Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire avec N. Brousseau (livre 535 pages) IREM de Bordeaux
1987
La mesure en cours moyen 1ère année N. Brousseau. (Situation sur les systèmes hétérogènes de numération décimale, le poids d'un verre d'eau) Livre 120 pages. IREM de Bordeaux.
« Représentation et didactique du sens de la division », didactique et acquisition des connaissances scientifiques, VERGNAUD Ed, la pensée sauvage, 1987
1992

Guy Brousseau, Rose Foucaud, ***Situations didactiques pour l'apprentissage des nombres naturels,*** **, IREM de Bordeaux (1992) (46 pages)**
1995
Les mathématiques à l'école (Bulletin de l'APMEP n°400)
1996
L'apprentissage des tables de multiplication
1997
Guy Brousseau La théorie des situations didactiques
Que peut-on enseigner en mathématiques à l'école primaire et pourquoi ? Observations
Que peut-on enseigner en mathématiques à l'école primaire et pourquoi ? conclusions (Notes pour le CS-ADIREM)
1998
BROUSSEAU G. (1998) "La théorie des situations didactiques". Recueil de textes de Didactique des mathématiques 1970-1990" présentés par M. COOPER et N. BALACHEFF, Rosamund SUTHERLAND et Virginia WARFIELD. (La pensée sauvage, Grenoble)
Les différents univers de la mesure et leurs situations fondamentales. Un exemple d'utilisation de la théorie des situations pour l'ingénierie (Ouvrage édité par Jean Portugais ?)
L'enseignement des rationnels et des décimaux (conférence Dijon)
2000
A propos de l'enseignement du calcul (Notes pour la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques)
Le nombre le plus grand (annexe de l'article « Les doubles jeux de l'enseignement des mathématiques)
2002
Notes sur les représentations numériques :
Note 8 La table de Caleb Gattegno, le sens des structures. (4p)
Note 13 Représentations avec la droite numérique (7p),
Une représentation fausse de Z (4p)
2003
Le nombre le plus grand, analyse dans l'articla sur le raisonnement avec P. Gibel

BIBLIOGRAPHIE

L'arithmétique aisée par le Sieur Gobain à Bordeaux (1711)
Textbooks « Tuhattaituri » (Helsinki, Otava) 2003 2004 2005 avec l'aimable aide de George Malaty, Université de Joensuu Suomi.